

УДК 004.021

Моделирование стохастического резонанса и некоторые подходы к его оценке

Попов В.С., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Информационные системы и телекоммуникации»*

Мишина Е.Л., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Информационные системы и телекоммуникации»*

Научный руководитель: Петросян О. Г., к.т.н., доцент

Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана

deviatkov@bmstu.ru

Стохастический переход – это смена состояния системы при пересечении системой определённого порогового уровня, причём пересечение порогового уровня не может быть достигнуто без внешнего шумового воздействия.

Стохастический резонанс можно определить как эффект, при котором наблюдается определённое сходство спектра мощности временной области исходного (без воздействия шума) сигнала и спектра мощности временной области функции стохастических переходов (стохастические переходы фиксируются короткими импульсами одинаковой амплитуды в момент времени, когда они происходили; в другие моменты времени значения временной области функции стохастических переходов равны нулю). Данный эффект может быть достигнут при изменении уровня шума, воздействующего на сигнал системы, или при изменении параметров самой системы.

В данной работе, не углубляясь в строгую математическую теорию стохастического резонанса, показаны принципы моделирования стохастического резонанса и даны некоторые подходы к оценке стохастического резонанса.

1. Стохастический резонанс как фундаментальный пороговый эффект [1]

Представим, что система устроена таким образом, что в процессе её работы некоторый параметр изменяется по определённому закону. Например, $p = \sin(kt)$ (рисунок 1), где p – изменяющийся параметр системы, t – время, k – некоторый коэффициент, взятый для удобства моделирования стохастического резонанса и отражающий количество периодов и количество отсчётов на период на интервале наблюдения.

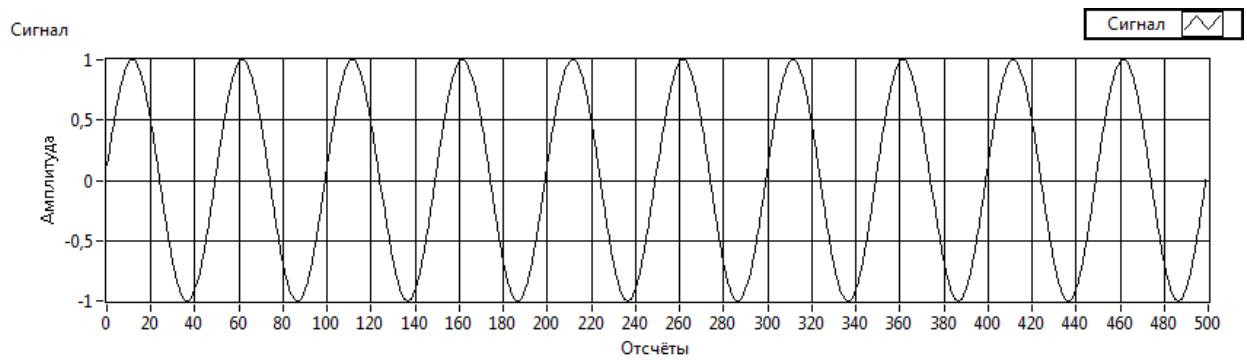


Рис. 1. Некоторый параметр системы изменяется по закону $p=\sin(kt)$

Добавим в систему пороговый уровень $\text{threshold}=2$ (рисунок 2). Без внешних воздействий значение параметра p никогда не пересечёт пороговый уровень threshold ввиду закона, по которому этот параметр p изменяется ($p=\sin(kt)$).

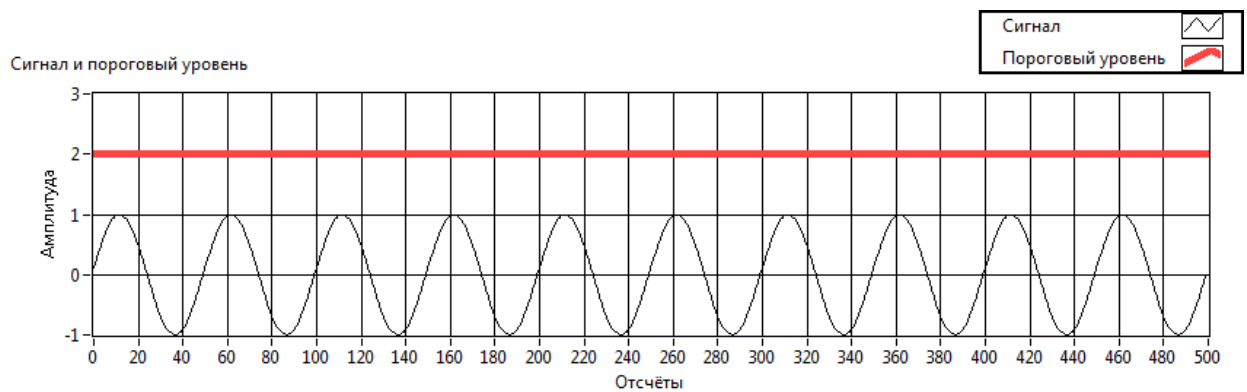


Рис. 2. Параметр системы p (на графике – сигнал) и пороговый уровень threshold

Как было сказано, стохастический резонанс – понятие, связанное с внешним шумовым воздействием на систему. Добавив аддитивное белое гауссовское шумовое воздействие $n(t)$ на параметр системы p , получим при определённых амплитудах шума $n(t)$ пересечение (превышение) порога в случайные моменты времени (рисунок 3). Пересечение (превышение) порога в некоторый момент времени t_i происходит при условии $p(t_i)+n(t_i)> \text{threshold}$.

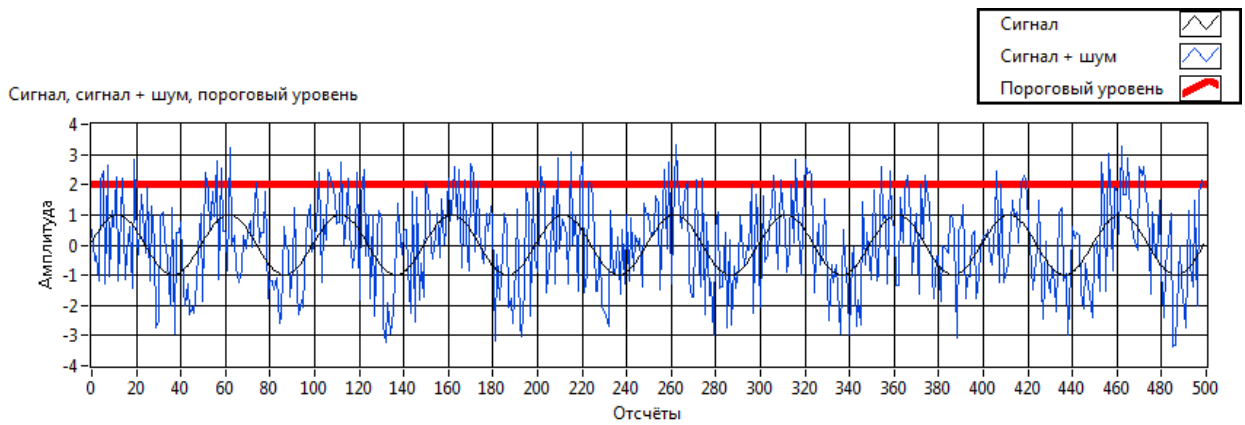


Рис. 3. Параметр системы p (на графике - сигнал), зашумлённый сигнал (сигнал + шум) и пороговый уровень threshold . Отношение амплитуды шума к амплитуде сигнала = 2,4

При пересечении порога зашумлённым сигналом генерируются кратковременные импульсы постоянной амплитуды $\text{imp}(t)$ (рисунок 4). Если же в момент времени t_i порог не пересекается, то $\text{imp}(t_i)=0$. (Если же порог был пересечён в момент времени t_i , то $\text{imp}(t_i)=\text{const}$, где $\text{const} \neq 0$).

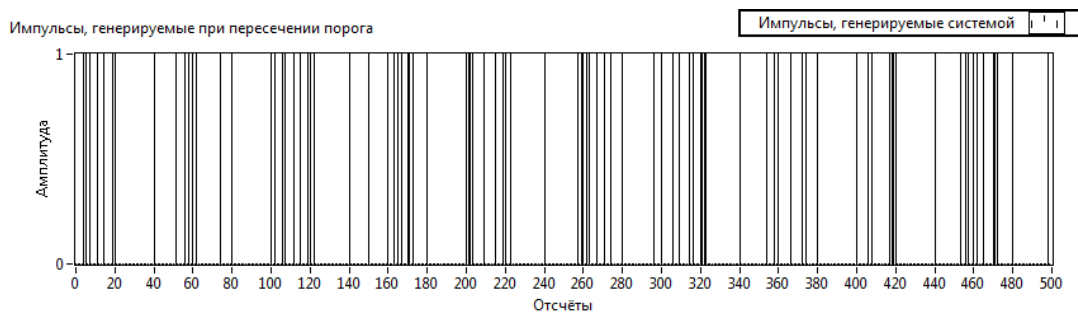


Рис. 4. Импульсы $\text{imp}(t)$, генерируемые системой при пересечении зашумлённым сигналом порога threshold . Амплитуда импульса в данном случае равна 1. Импульсы на данном графике сгенерированы для реализации шума, приведённого на рис. 3

Сравним спектр мощности исходного сигнала p и спектр мощности сгенерированной последовательности импульсов imp (рисунок 5).



Рис. 5. Спектры мощности исходного сигнала и сгенерированной последовательности импульсов. (Временная область исходного сигнала приведена на рис. 1-3, временная область сгенерированной последовательности импульсов приведена на рис. 4)

2. Оценка стохастического резонанса

Сходство двух вышеупомянутых спектров мощности определяет силу стохастического резонанса, причём рассматривается сходство не по амплитуде, а по виду спектров мощности. Например, если слишком сильно зашумить сигнал p , увеличив отношение амплитуды шума к амплитуде сигнала до 100, и при этом оставить уровень порога на прежнем уровне $\text{threshold}=2$, то график спектра мощности сгенерированной последовательности импульсов imp изменит свой вид, утратив сходство с графиком спектра мощности исходного сигнала p (рисунок 6).



Рис. 6. Реализация спектров мощности исходного сигнала и сгенерированной последовательности импульсов при отношении амплитуды шума к амплитуде сигнала равном 100: сходство между двумя графиками утрачено; вид спектра мощности сгенерированных импульсов будет незначительно отличаться в зависимости от реализации шума

В зависимости от того, каким образом определено сходство между графиками спектра мощности исходного сигнала и спектра мощности сгенерированной последовательности импульсов, можно по-разному определять области максимального стохастического резонанса в зависимости от амплитуды шума и уровня порога.

Кроме амплитуды шума и уровня порога на стохастический резонанс влияют такие параметры как:

- Модель шума
- Количество периодов функции p на интервале наблюдения
- Количество отсчётов на период функции p
- Количество экспериментов (усреднение)
- Амплитуда импульсов $\text{imp}(t_i)$, генерируемых при пересечении порога
- И т.д.

Рассмотрим далее различные определения сходства между графиками указанных спектров мощности и вид двумерных и трёхмерных функций стохастического резонанса в зависимости от уровня порога threshold и амплитуды шума $n(t)$, задав другие параметры постоянными.

2.1 Разность между двумя особыми точками спектров мощности

В качестве критерия стохастического резонанса можно выбрать разность между точками спектров мощности, которые могут быть найдены по следующему алгоритму (рисунок 7):

1. В спектре мощности исходного сигнала p найти максимум по вертикальной оси (по оси ординат) – это точка $\text{MAX}(\text{PSD}(p))$, где PSD – функция спектра мощности.
2. Найти на горизонтальной оси (по оси абсцисс) координату, соответствующую максимуму спектра мощности, найденному на шаге 1.
3. В спектре мощности сгенерированной последовательности импульсов найти значение, соответствующее абсциссе, найденной на шаге 2.
4. Вычсть из значения ординаты, найденной на шаге 1, значение, найденное на шаге 3.

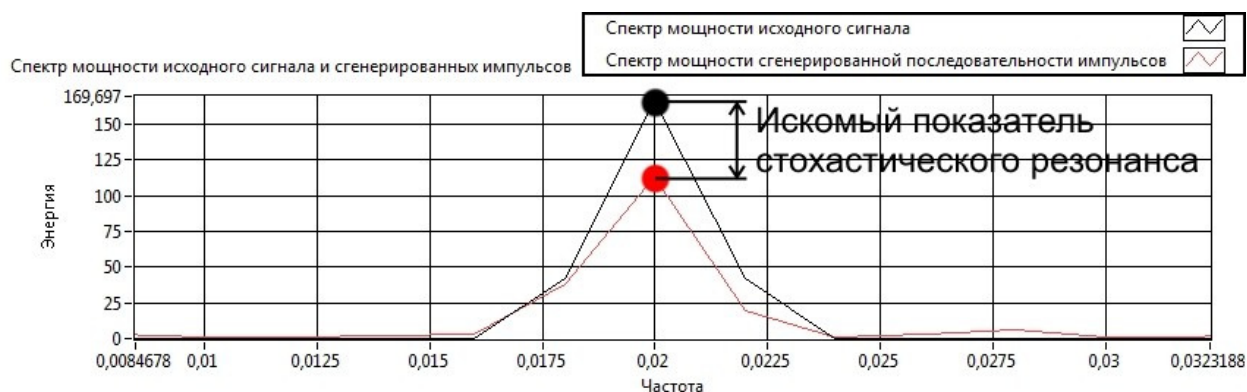


Рис. 7. Нахождение показателя, характеризующего резонанс по методу разности между двумя точками спектров мощности

Чем меньше данная разность, тем больше проявляется стохастический резонанс.

Имея численный показатель, характеризующий стохастический резонанс, можно приступить к изучению поведения стохастического резонанса с изменением амплитуды шума (рисунок 8) и уровня порога (рисунок 9). Также возможно получить трёхмерный график зависимости стохастического резонанса от амплитуды шума и уровня порога (рисунок 10).



Рис. 8. Зависимость описанной выше разности между двумя точками спектров мощности от амплитуды шума при неизменном пороговом уровне, равном 2: при построении графика использовалось усреднение; область 1 характеризуется полным отсутствием резонанса – уровня шума не хватает для пересечения порога; область 2 характеризуется максимальным стохастическим резонансом, после чего разность снова стремится к максимальному значению (область 3), и резонанс не наблюдается



Рис. 9. Зависимость описанной выше разности между двумя точками спектров мощности от уровня порога при неизменной амплитуде шума, равной 3: при построении графика использовалось усреднение; область 1 характеризует максимальный стохастический резонанс – это та область, где порог максимально приближен к исходному сигналу; в

области 3 пересечений порога не фиксируется – для этого недостаточно амплитуды шума;
 область 2 является переходной между областями 1 и 3

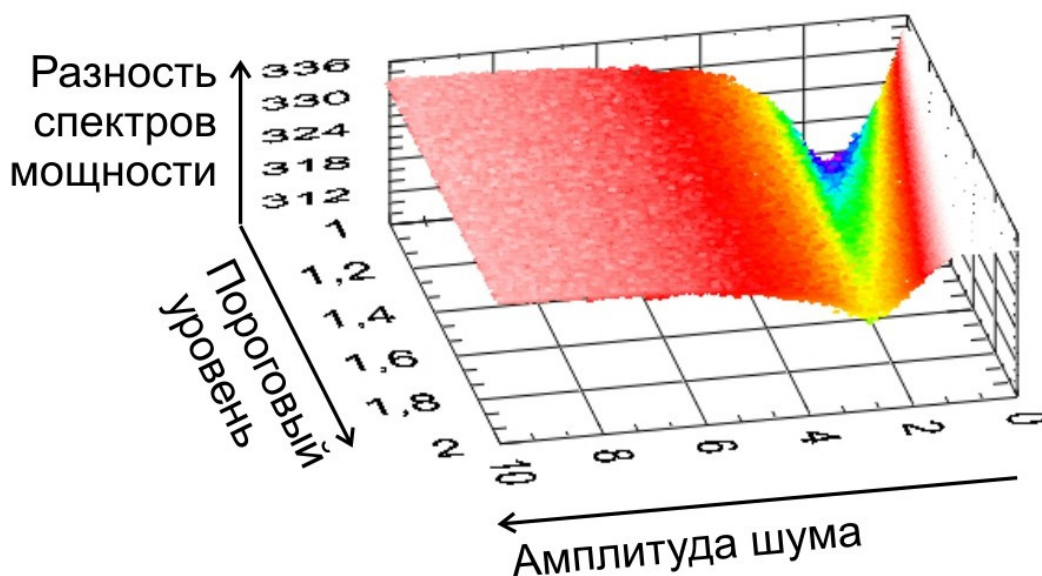


Рис. 10. Трёхмерный график зависимости описанной выше разности между двумя точками спектров мощности от порогового уровня и амплитуды шума: здесь наименьшего значения разность достигает при наименьшем пороговом уровне и амплитуде шума, близкой к 2

2.2 Отношение сумм энергий спектра мощности импульсов, находящихся под «куполом» спектра мощности исходного сигнала, к сумме энергий остальных отсчётов.

Сумма «полезных» энергий спектра мощности сгенерированных импульсов лежит под графиком спектра мощности исходного сигнала и составляет делимое. Делителем является сумма оставшихся энергий (рисунок 11).

Спектр мощности исходного сигнала и сгенерированных импульсов

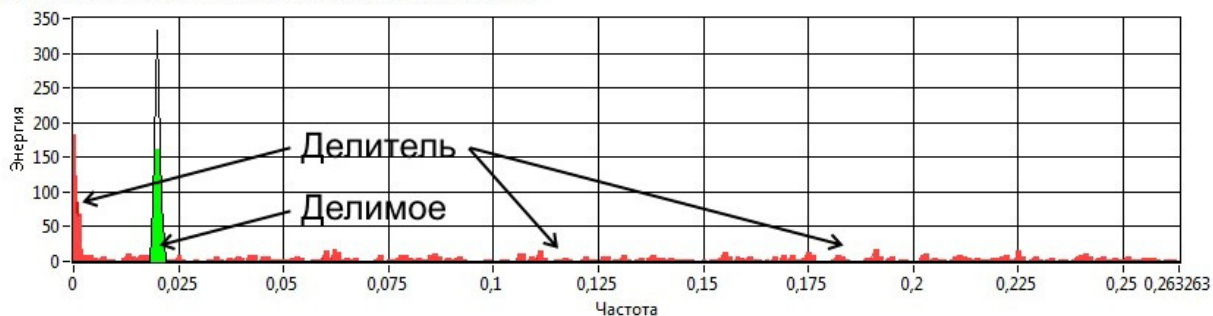


Рис. 11. Сумма энергий спектра мощности сгенерированных импульсов, лежащая под графиком спектра мощности исходного сигнала, составляет делимое, сумма оставшихся энергий составляет делитель

Чем больше данное отношение, тем больше проявляется стохастический резонанс.

2.3 Перемножение спектров мощности

Два рассмотренных выше спектра мощности могут быть перемножены поэлементно, в результате чего будут учтены только те отсчёты спектра мощности сгенерированной последовательности импульсов, которые соответствуют ненулевым отсчётам спектра мощности исходного сигнала. Оценка стохастического резонанса по этой методике даёт результаты, похожие на результаты методик 2.1 и 2.2. При этом стохастический резонанс наблюдается тогда, когда описанное произведение спектров мощности максимально или близко к максимальному.

2.4 Подсчёт корреляции

В качестве удачного параметра для оценки стохастического резонанса можно также рассматривать корреляцию спектра мощности исходного сигнала и спектра мощности сгенерированной последовательности импульсов. Чем больше корреляция спектров мощности, тем лучше проявляется стохастический резонанс.

Список литературы

1. Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // Успехи физических наук. Январь 1999. Т. 169, №1. С. 16-17.
2. Трэвис Д., Кринг Д. LabVIEW для всех. М.: ДМК Пресс, 2008. 880 с.
3. Герман Д. Я. Цифровая обработка сигналов. Конспект лекций. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. 174 с.